

# МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 514.8, 530.12, 519.6

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРАВИТИРУЮЩИХ КОНФИГУРАЦИЙ С ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Соловьев Д.А., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В.

Кафедра математических методов современного естествознания

---

*Поступила в редакцию 16.09.2011, после переработки 21.10.2011.*

---

В работе получены интегральные формулы метода обратной задачи для сферически-симметричных статических фантомных скалярных конфигураций с электрическим зарядом. Дана полезная характеристика возможных классов решений уравнений Эйнштейна в зависимости от типа асимптотики радиальной метрической функции. Найдены достаточные условия существования фантомных заряженных топологических геон и изучены их свойства.

In this work we obtain integral formulas of the inverse problem method for the spherically symmetric static phantom configurations. The useful characterization of possible classes of solutions to the Einstein equations, depending on the asymptotic type of the radial metric function, is given. Sufficient conditions of the existence of phantom charged topological geons are found and their properties are explored.

**Ключевые слова:** фантомное скалярное поле, черная дыра, кротовая нора, геон.

**Keywords:** phantom scalar field, black hole, wormhole, geon.

### Введение

На существование скалярных полей в галактических масштабах и в космологии ранней Вселенной косвенно указывают современные астрономические наблюдения и эксперименты в области физики элементарных частиц. В галактической и субгалактической астрономии поиски экзотических объектов, к которым относятся в первую очередь черные дыры и кротовые норы [1, 2], находятся в стадии интенсивного развития [3, 4, 5, 6, 7]. В космологических исследованиях стадии инфляции экзотические скалярные частицы (инфлатоны), природа которых в настоящее время неизвестна, являются неотъемлемой частью всех жизнеспособных теорий. В частности, широко рассматриваются модели частиц с нетривиальной топологией [8], а среди них наиболее простыми и естественными являются топологические геоны [9, 10], которые могут быть образованы самогравитирующим фантомным скалярным полем. Математическая теория статических конфигураций с классическим скалярным полем основывается на методе обратной задачи

для самогравитирующих полей [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] (с методом обратной задачи теории потенциального рассеяния имеется лишь формальное сходство), но для фантомных полей соответствующие методы практически не развиты.

Целью данной работы является развитие методов математического моделирования (а также исследование конкретных математических моделей) статических сферически-симметричных самогравитирующих конфигураций, образованных из фантомного скалярного поля и обладающих, вообще говоря, электрическим зарядом. Работа состоит из трех разделов. В разделе 1 получено обобщение интегральных формул метода обратной задачи для заряженных конфигураций и, далее, посредством естественного координатного преобразования они приведены к специальному виду, наиболее приспособленному для классификации и исследования самогравитирующего фантомного скалярного поля. В разделе 2 изучаются фантомные скалярные конфигурации без заряда с асимптотически плоской метрикой в области пространства-времени, соотнесенной с удаленным наблюдателем. Дана полная характеристика статических решений уравнений Эйнштейна, в рамках известной классификации [13], в зависимости от принадлежности радиальной метрической функции к одному из четырех возможных типов, отличающихся друг от друга асимптотическим поведением в противоположной области пространства-времени или вблизи сингулярности. В разделе 3 изучаются условия существования и свойства фантомных заряженных топологических геонов. Отметим, что во всех случаях проведенный анализ без существенных изменений можно обобщить на случай асимптотики Шварцшильда – (анти) де Ситтера ( $Sch/(A)dS$ –асимптотики) в области удаленного наблюдателя, хотя, конечно, такое обобщение задачи имеет чисто теоретический интерес.

## 1. Метод обратной задачи в теории гравитирующих скалярных конфигураций

Мы исходим из действия (в геометрической системе единиц,  $G = c = 1$ )

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi} \int \left( -\frac{1}{2}S + \varepsilon \langle d\phi, d\phi \rangle - 2V(\phi) - \frac{1}{2} \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle \right) \sqrt{|g|} d^4x, \quad (1)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  — знак кинетического члена скалярного поля ( $\varepsilon = -1$  для фантомного поля),  $S$  — скалярная кривизна,  $\mathcal{F}$  — 2-форма электромагнитного поля,  $V(\phi)$  — потенциал самодействия, а угловые скобки обозначают скалярное произведение относительно метрики. Метрику статического сферически-симметричного пространства-времени запишем в форме

$$ds^2 = e^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где метрические функции  $F$  и  $f$  зависят только от  $r$ .

Электромагнитный потенциал, совместимый со сферической симметрией, для статической конфигурации имеет вид  $\mathcal{A} = \sigma(r)dt$ , так что уравнения Максвелла  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ ,  $\delta\mathcal{F} = 0$  дают  $\mathcal{F} = e^F \frac{q}{r} dt \wedge dr$ . Удобно записать уравнения Эйнштейна в ортонормированном базисе, соответствующем метрике (2), чтобы избавиться от лишних множителей. Полная система независимых уравнений, редуцированная в

электромагнитной части, но включающая уравнение для скалярного поля, имеет вид

$$-\frac{f'}{r} - \frac{f-1}{r^2} = \varepsilon\phi'^2 f + 2V + \frac{q^2}{r^4}, \quad (3)$$

$$\frac{f}{r} \left( 2F' + \frac{f'}{f} \right) + \frac{f-1}{r^2} = \varepsilon\phi'^2 f - 2V - \frac{q^2}{r^4}, \quad (4)$$

$$-f\phi'' - \frac{\phi'}{2}f' - \phi'f \left( F' + \frac{1}{2}\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) + \varepsilon\frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ .

Метод решения обратной задачи, развитый в работах [15, 16, 17] для чисто скалярных конфигураций, достаточно очевидным образом обобщается на случай конфигураций с электрическим зарядом. Общее решение можно записать в виде

$$F = -\varepsilon \int_r^\infty \phi'^2 r dr, \quad f = 2r^2 e^{-2F} \left( \int_r^\infty \frac{Q-3m}{r^4} e^F dr - \frac{\Lambda}{6} \right), \quad (6)$$

$$\tilde{V}(r) = \frac{1}{2r^2} \left( 1 - 3f + \varepsilon r^2 \phi'^2 f + 2e^{-F} \frac{Q-3m}{r} - \frac{q^2}{r^2} \right), \quad (7)$$

где

$$Q(r) = \xi(r) + 2q^2 \int_r^\infty (e^F/r^2) dr, \quad \xi(r) = r + \int_r^\infty (1 - e^F) dr, \quad (8)$$

$\tilde{V}(r) \equiv V(\phi(r))$  — координатная функция потенциала, постоянные интегрирования выбраны так, что  $m$  — гравитационная масса и  $\Lambda$  — космологическая постоянная. Выбирая произвольную монотонную функцию  $\phi$  или знакопостоянную функцию  $\phi'$ , можно получать конкретные решения прямым интегрированием, вычисляя вначале метрические функции, затем потенциал самодействия  $\tilde{V}$  как функцию радиальной координаты, а затем потенциал  $V(\phi)$  как функцию поля. Заметим, что формулы (6), (7) верны для любого статического решения, без предположения о монотонности функции  $\phi$ , причем их можно проверить прямой подстановкой в уравнения поля (3) – (5). Характеристическая функция  $f$ , удовлетворяющая очевидному соотношению  $f = -\langle dr, dr \rangle$ , обращается в нуль или на горизонте событий, где 1-форма  $dr \neq 0$  становится изотропной и  $f' \geq 0$ , или на горловине кротовой норы, где  $dr = 0$  и  $f' = 0$ .

Решение (6) – (8) позволяет классифицировать и провести общий анализ конфигураций с классическим скалярным полем. В случае фантомных полей удобно преобразовать данное решение к другому виду, явно учитывающему геометрию и топологию таких конфигураций, как кротовые норы и топологические геоны. Функция  $\xi(r)$  строго монотонна на  $\mathbb{R}_+$ , поскольку  $\xi' = e^F$ , поэтому  $\xi$  может быть выбрана в качестве новой радиальной координаты. Подставляя  $d\xi = e^F dr$  в метрику (2) и формулы (6), (7), и используя обозначение  $A = fe^{2F}$ , мы можем записать метрику и интегральные формулы общего решения обратной задачи в координатах  $(t, \xi, \theta, \varphi)$  в виде (индекс  $\xi$  обозначает дифференцирование)

$$ds^2 = A dt^2 - \frac{d\xi^2}{A} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9)$$

$$\phi_\xi = \sqrt{-\varepsilon r_{\xi\xi}/r}, \quad Q(\xi) = \xi + 2q^2 \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{r^2}, \quad (10)$$

$$A(\xi) = 2r^2 \int_\xi^\infty \frac{Q-a}{r^4} d\xi - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad f(\xi) = r_\xi^2 A(\xi), \quad (11)$$

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{1}{2r^2} \left( 1 - 3r_\xi^2 A - r r_{\xi\xi} A + 2r_\xi \frac{Q-a}{r} - \frac{q^2}{r^2} \right), \quad (12)$$

где  $a$  — постоянная, а функция  $r(\xi)$  класса  $\mathcal{C}^2$  во всей области определения должна удовлетворять условию  $r_{\xi\xi} < 0$  или  $r_{\xi\xi} > 0$  для  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = -1$  соответственно. В таком подходе любая неотрицательная выпуклая функция  $r(\xi)$  может быть выбрана в качестве отправной точки вместо полевой функции  $\phi(r)$  как при получении конкретных решений, так и при общем анализе классов конфигураций. Полевую и метрическую функции можно найти по заданной функции  $r(\xi)$  прямым интегрированием. Интегральные формулы общего решения обратной задачи в форме (9) – (12) были получены ранее в предположениях  $\varepsilon = 1$ ,  $q = 0$  в работе [18] (а также, в неявной форме, много раньше в работе [12]) совершенно другим путем, однако использование данного подхода наиболее эффективно, как видно из последующих рассуждений, именно для фантомных скалярных полей с  $\varepsilon = -1$ .

Сделаем два общих замечания, касающихся дальнейшего анализа. Во-первых, всюду далее мы считаем  $\Lambda = 0$  и рассматриваем самогравитирующее фантомное скалярное поле с точки зрения свободно движущегося наблюдателя, расположенного (например, в окрестности Земли) в асимптотически плоской области  $\xi \rightarrow +\infty$ , где координаты выбраны так, что

$$r = \xi + b + o(1), \quad A = 1 - 2m/r + o(1), \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Прямая подстановка асимптотики (13) для  $r(\xi)$  в (11) дает следующую формулу для гравитационной массы конфигурации:

$$m = \frac{a+b}{3}. \quad (14)$$

Таким образом, с точки зрения удаленного наблюдателя, измеряющего параметры орбит пробных частиц, масса может иметь любое значение, в том числе быть отрицательной или равной нулю. В противоположной области пространства-времени (если она входит в область определения функции  $r(\xi)$ ), т. е. при  $\xi \rightarrow -\infty$ , асимптотика метрики и свойства конфигурации определяются аналитическим продолжением решения через горловину кротовой норы или горизонт событий.

Во-вторых, поскольку решение (9) – (12) инвариантно относительно сдвигов  $\xi \rightarrow \xi + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то для устранения произвола на функцию  $r(\xi)$  необходимо наложить дополнительное условие, совместимое с данной инвариантностью. Можно было бы в (13) положить  $b = 0$ , тогда  $a = 3m$ , как в формулах (6) – (8), однако мы сохраним этот произвол и будем фиксировать выбор  $r(\xi)$  наиболее удобным образом в каждом конкретном случае, учитывая, что функция  $r(\xi)$  неотрицательна и  $r_{\xi\xi} > 0$  во всей области определения. Если  $r(\xi)$  имеет минимум  $r_0$ , то на основании

отмеченной выше инвариантности мы без потери общности будем считать  $\xi = 0$  точкой минимума, т. е.  $r(0) = r_0$ . Аналогично, если  $r(\xi)$  монотонно возрастает от нулевого значения,  $r(\xi_0) = 0$ , то будем считать  $\xi_0 = 0$ , так что в этом случае функция  $r(\xi)$  определена на сегменте  $[0, \infty)$ . Наконец, если  $r(\xi)$  монотонно возрастает от конечного значения  $r(-\infty) \geq 0$ , так что  $r \rightarrow r(-\infty) + 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , то будем считать  $b = 0$  в асимптотике (13), т. е.  $r \sim \xi + o(1)$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ . Очевидно, что эти возможности, представленные графически на Рис. 1, исчерпывают все непродолжимые варианты выбора функции  $r(\xi)$ .

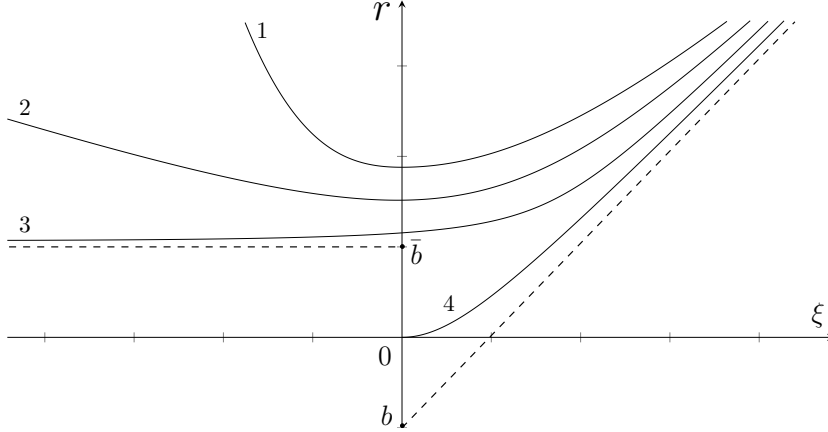


Рис. 1: Возможные типы функции  $r(\xi)$ . На правых ветвях кривых асимптотика одинакова и имеет вид  $r = \xi + b + o(1)$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ . На левых ветвях кривых, т. е. при  $\xi \rightarrow -\infty$ ,  $r \sim \alpha|\xi|^k$  ( $k > 1$ ) на кривой 1,  $r = -\alpha\xi + \bar{b} + o(1)$  ( $\alpha > 0$ ) на кривой 2 и  $r = \bar{b} + o(1)$  на кривой 3. Кривая 4 удовлетворяет условию  $r(0) = 0$  и определяет сингулярные черные дыры и голые сингулярности.

## 2. Конфигурации с фантомным скалярным полем без заряда

Пусть  $q = 0$ , тогда формулы, определяющие метрику и поле, принимают вид

$$I(\xi, a) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\xi - a}{r^4} d\xi, \quad A = 2r^2 I(\xi, a), \quad f = r_{\xi}^2 A, \quad \phi_{\xi} = \sqrt{r_{\xi\xi}/r}. \quad (15)$$

I. *Кротовые норы и регулярные черные дыры.* К данному классу относятся, в частности, решения с асимптотикой

$$r = -\alpha\xi + \bar{b} - \frac{c}{\xi} + \frac{d}{\xi^2} + o(\xi^{-2}), \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad \alpha \geq 0, \quad \bar{b} \in \mathbb{R}, \quad c \geq 0, \quad (16)$$

причем если  $c = 0$ , то  $d \leq 0$  и т. д. Знак метрической функции  $A$  определяется знаком интеграла  $I(\xi, a)$ , который достигает положительного максимума в точке  $\xi = a$ , а слева и справа от этой точки является строго монотонно возрастающей

и, соответственно, убывающей функцией переменной  $\xi$ . Поэтому конфигурация с асимптотикой (16) может быть или кротовой норой, или черной дырой с одним горизонтом событий.

Пусть, вначале,  $\alpha > 0$  и, следовательно, интеграл  $I(\xi, a)$  сходится при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Тогда из (15) следует асимптотическое разложение

$$A = 2I(-\infty, a) ((\alpha\xi - \bar{b})^2 + 2\alpha c) + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\xi} \left( \frac{\bar{b} - \alpha a}{3\alpha^3} - 2(\bar{b}c + \alpha d)I(-\infty, a) \right), \quad \xi \rightarrow -\infty. \quad (17)$$

В области  $\xi < 0$  из (16) находим:  $\alpha\xi = \bar{b} - r + \alpha c/r + \alpha(\bar{b}c + \alpha d)/r^2 + o(r^{-2})$  при  $r \rightarrow \infty$ . Подставляя это выражение в (17), легко увидеть, что в координатах  $(\tau, r)$ , где  $\tau = t/\alpha$ , метрика и асимптотические разложения метрических функций в области  $\xi < 0$  примут вид

$$ds^2 = A_1 d\tau^2 - \frac{dr^2}{A_2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

$$A_1 = 2\alpha^2 I(-\infty, a)r^2 + 1 - \frac{2(\bar{b} - \alpha a)}{3r} + o(1/r), \quad A_2 = A_1 + o(1/r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если  $I(-\infty, a) \geq 0$ , то конфигурация является кротовой норой с плоской или  $Sch/AdS$ -асимптотикой в противоположной от наблюдателя области пространства-времени. Если  $I(-\infty, a) < 0$ , то мы имеем регулярную черную дыру с  $Sch/dS$ -асимптотикой под горизонтом событий.

Характеристические свойства рассматриваемых конфигураций легко вывести из предыдущих рассуждений. У кротовой норы метрическая функция  $A$  всюду положительна. Горловина кротовой норы задается уравнением  $\xi = 0$  и на этом подмногообразии радиальная функция  $r(\xi)$  принимает минимальное значение, а характеристическая функция  $f$  и ее производная  $f_\xi$  равны нулю. У черной дыры метрическая функция  $A$  обращается в ноль в некоторой точке  $\xi = \xi_0$ , поэтому характеристическая функция принимает нулевые значения или в одной точке  $\xi = 0$ , если нули функций  $r_\xi$  и  $A$  совпадают в этой точке, или в двух точках, если  $\xi_0 \neq 0$ . В последнем случае, если  $\xi_0 < 0$ , то характеристическая функция имеет один минимум в точке  $\xi = 0$  и один максимум в интервале  $(\xi_0, 0)$ , а если  $\xi_0 > 0$ , то она имеет один максимум в точке  $\xi = 0$  и один минимум в интервале  $(0, \xi_0)$ . Отметим, что если  $\xi_0 < 0$ , то для удаленного наблюдателя такая черная дыра может выглядеть как кротовая нора, у которой за горловиной (сколь угодно малого радиуса  $r(0)$ ) расположен (сколь угодно далеко) горизонт событий. В каждом из этих случаев в противоположной от наблюдателя области пространства-времени шварцшильдова масса  $m = (\bar{b} - \alpha a)/3$  может принимать любые значения, скалярное поле  $\phi \rightarrow const$  при  $r \rightarrow \infty$ , а потенциал самодействия всюду регулярен.

Если  $\alpha = 0$  и, следовательно,  $I(\xi, a) \rightarrow -\infty$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , то мы имеем регулярную черную дыру с геометрией по типу анизотропной вселенной Кантовского-Сакса в асимптотической области  $\xi \rightarrow -\infty$  под горизонтом событий. Например, при  $\bar{b} \neq 0$  интегрируя по частям в (16), находим, что  $A = -\xi^2/\bar{b}^2 + O(\xi)$  и  $r \rightarrow \bar{b}$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , поэтому метрика в асимптотической области  $\xi \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$ds^2 = \frac{\bar{b}^2}{\xi^2} d\xi^2 - \frac{\xi^2}{\bar{b}^2} dt^2 - \bar{b}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где в первой, второй и третьей метрических функциях для простоты записи опущены слагаемые порядка  $O(1/\xi^3)$ ,  $O(\xi)$  и  $O(1/\xi)$  соответственно. Геометрия вселенной Кантовского-Сакса в рассматриваемом контексте изучена в работе [13], где и были впервые обнаружены регулярные черные дыры с фантомным скалярным полем. Отметим только, что во всех случаях координата  $\xi$  становится временной под горизонтом событий, а  $t$  — пространственной.

Асимптотика более общего вида, чем (16), например  $r \sim \alpha|\xi|^k$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , где  $k > 1$  вследствие требования  $r_{\xi\xi} > 0$ , дает

$$A = 2\alpha^2 I(-\infty, a)|\xi|^{2k} + \frac{\alpha|\xi|^{2-2k}}{\alpha^2(2k-1)} + o(|\xi|^{2-2k}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Если  $I(-\infty, a) < 0$ , то решение описывает регулярную черную дыру с геометрией по типу вселенной Кантовского-Сакса в асимптотической области  $\xi \rightarrow -\infty$  под горизонтом событий. В остальных случаях удобно перейти к координатам  $(t, r)$ , с учетом соотношения  $d\xi^2 = \left\{ k^2 \alpha^2 |\xi|^{2k-2} + o(|\xi|^{2k-2}) \right\} dr^2$ . Если  $I(-\infty, a) > 0$ , то решение описывает кротовую нору с  $AdS$ -асимптотикой в противоположной от наблюдателя области пространства-времени. Если  $I(-\infty, a) = 0$ , то мы имеем кротовую нору с метрикой  $ds^2 = dt^2/r^{2-2/k} - k^2/(2k-1)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$  в асимптотике  $r \rightarrow \infty$  (в метрических функциях опущены члены более высокого порядка малости). В такой геометрии пространство-время на большом удалении за горловиной кротовой норы выглядит «застывшим» для удаленного наблюдателя в том смысле, что фотоны испытывают бесконечное красное смещение, а относительные скорости частиц стремятся к нулю. Если радиальная функция в этой области возрастает еще быстрее, например по закону  $r \sim \alpha|\xi|^k \exp(\beta\xi)$  ( $\beta < 0$ ),  $\xi \rightarrow -\infty$ , то по-прежнему реализуются три типа решений и только они, причем качественно с тем же самым поведением.

II. *Топологические геоны.* Так называются фактормногообразия  $M/\mathbb{Z}_2$ , где  $M$  — кротовая нора, симметричная относительно горловины, а группа  $\mathbb{Z}_2$  порождена изометрией  $\xi \rightarrow -\xi$ . Мы получим симметричную кротовую нору и топологический геон тогда и только тогда, когда  $r(\xi)$  — четная функция и  $a = 0$  (при этих условиях функции  $r_\xi^2$ ,  $I(\xi, 0)$  и  $A(\xi)$  также четные). Пусть функция  $r(\xi)$  четная и гладкая в окрестности нуля, тогда при  $r \rightarrow 0$

$$r = r_0 + \alpha\xi^2 + \beta\xi^4 + O(\xi^6), \quad \phi_\xi^2 = \frac{2\alpha}{r_0} + \frac{12\beta r_0 - 2\alpha^2}{r_0^2} \xi^2 + o(\xi^4), \quad (18)$$

$$A = 2r_0^2 I(0, 0) + (4r_0 \alpha I(0, 0) - 1/r_0^2) \xi^2 + (4\beta r_0 + 2\alpha^2) I(0, 0) \xi^4 + o(\xi^6).$$

Для топологического геона, вообще говоря, скалярное поле должно рассматриваться как сечение одномерного векторного расслоения со структурной группой  $\mathbb{Z}_2$ , поскольку при его трактовке как функции часть решений будет потеряна [19]. В общем случае функции перехода  $(t, \xi, \theta, \varphi, \phi) \rightarrow (t, \xi', \theta', \varphi', \phi')$  между картами расслоения таковы, что  $\phi' = \pm\phi$ . Как видно из (18), нижний знак с необходимостью реализуется в некоторых функциях перехода, если  $\alpha \neq 0$ ; тогда скалярное поле является нечетной функцией и меняет знак на топологической особенности геона (на подмногообразии, заданном уравнением  $\xi = 0$ ). Если же  $\alpha = 0$ , то  $\phi$

может рассматриваться как функция на  $M/\mathbb{Z}_2$ , которая достигает максимума на топологической особенности.

III. *Сингулярные черные дыры и голые сингулярности.* К данному классу относятся решения, определяемые радиальной функцией, удовлетворяющей условию  $r(0) \equiv r_0 = 0$ . Поскольку  $r_{\xi\xi} > 0$ , то  $r = o(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0 + 0$  и интеграл  $I(\xi, a)$  расходится. Отсюда сразу следует, что при  $a \leq 0$  решения представляют собой голые сингулярности, а при  $a > 0$  — черные дыры с сингулярностью в центре. Если  $r(\xi)$  — гладкая функция в окрестности нуля и  $r \sim \alpha \xi^k$  ( $k \geq 2$ ) при  $r \rightarrow 0 + 0$ , то стандартные вычисления дают для метрики вблизи нуля выражение

$$ds^2 = \left( \frac{\alpha^{2/k}}{(4k-2)r^{2-2/k}} - \frac{a\alpha^{1/k}}{(4k-1)r^{2-1/k}} \right) dt^2 - \left( \frac{k^2}{4k-2} - \frac{ak^2\alpha^{1/k}}{(4k-1)r^{1/k}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где в двух первых метрических функциях опущены члены более высокого порядка малости. Как и в геометрии Шварцшильда при всех  $k \geq 2$  черная дыра ( $a > 0$ ) имеет под горизонтом событий пространственноподобную сингулярность. Голые сингулярности ( $a \leq 0$ ) качественно подобны шварцшильдовой голой сингулярности с отрицательной массой. Анализ поведения метрических функций вблизи сингулярностей показывает, что если  $r(\xi)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow 0 + 0$  быстрее, чем по степенному закону, то характер решений качественно не меняется.

### 3. Заряженные топологические геоны

Решение (9) – (12) представляет симметричную конфигурацию с изометрией  $\xi \rightarrow -\xi$  тогда и только тогда, когда  $r(\xi)$  четная функция и в подынтегральном выражении в (11) стоит нечетная функция, поскольку только при этих условиях метрическая функция  $A(\xi)$  четная. Очевидно, это возможно при единственном значении постоянной  $a$ ,

$$a = 2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}, \quad (19)$$

так что формулы, определяющие такую конфигурацию, можно записать в виде

$$I(\xi, q) = \int_\xi^\infty \frac{w(\xi, q)}{r^4} d\xi, \quad w(\xi, q) = \int_0^\xi \left( 1 - \frac{2q^2}{r^2} \right) d\xi, \quad A = 2r^2 I(\xi, q). \quad (20)$$

Если  $I(0, q) \leq 0$ , то удаленный наблюдатель видит обычную черную дыру, у которой, однако, под горизонтом событий вместо сингулярности находится горловина кротовой норы, а за ней — зеркально симметричная область пространства-времени. Для четной функции  $r(\xi)$  формулы (20) будут определять заряженную симметричную кротовую нору или топологический геон тогда и только тогда, когда  $I(0, q) > 0$ . Очевидным достаточным условием для этого является выполнение неравенства  $q \leq r_0/\sqrt{2}$  (здесь и далее мы для определенности считаем, что



$q \geq 0$ ), поэтому заряженные топологические геоны существуют при любом выборе четной функции  $r(\xi)$ .

Для асимптотически плоских конфигураций с  $\Lambda = 0$  разложение (13), уточненное по вкладу электрического заряда, принимает вид

$$r = \xi + b + o(1), \quad A = 1 - \frac{2m}{\xi} + \frac{q^2 + 2mb}{\xi^2} o(1), \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (21)$$

или, в координатах  $(t, r)$ ,

$$A = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + O(r^{-3}), \quad r \rightarrow \infty, \quad m = \frac{a+b}{3}. \quad (22)$$

Таким образом, в асимптотической области метрика геона формально совпадает с метрикой Рейсснера-Нордстрема, причем гравитационная масса по-прежнему вычисляется по формуле (14). Однако теперь постоянная  $a$  не произвольна, а определяется через интеграл (19), т. е. зависит и от величины заряда, и от поведения функции  $r(\xi)$  на всей полупрямой. Следовательно, значения массы и заряда оказываются связанными величинами. Имея ввиду возможное применение полученных решений к моделированию реальных частиц, которые могли возникать в ранней Вселенной на стадии инфляции за счет так называемых топологических перестроек (topology change [8, 9]), выясним, в какой области значений массы  $m$ , заряда  $q$  и «размера»  $r_0 = r(0)$  может существовать заряженный топологический геон. Отметим, что в отличие от этих трех, в принципе измеряемых параметров, параметр  $b$  остается свободным; он удовлетворяет единственному и очевидному ограничению  $b < r_0$  (см. Рис. 1) и может принимать, в частности, любые отрицательные значения.

Инвариантность решения (9) – (12) относительно масштабных преобразований

$$r \rightarrow r/\lambda, \quad \xi \rightarrow \xi/\lambda, \quad s \rightarrow s/\lambda, \quad m \rightarrow m/\lambda, \quad q \rightarrow q/\lambda, \quad V \rightarrow \lambda^2 V$$

сводит поставленный выше вопрос к изучению области значений только двух параметров:  $q/m$  и  $r_0$ . Наиболее значимый интерес представляет вопрос о том, насколько велико может быть отношение заряда к массе. В метрике Рейсснера-Нордстрема физически осмысленные решения — черные дыры — возникают при  $q/m \leq 1$  (при  $q/m > 1$  — голые сингулярности), т. е. при нереально больших значениях массы, если полагать, что  $q$  ограничено снизу величиной порядка заряда электрона. В нашем случае справедлива оценка

$$\xi + r_0 > r(\xi), \quad \xi \in (0, \infty) \quad \Rightarrow \quad a = 2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2} < 2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + r_0)^2} = \frac{2q^2}{r_0},$$

поэтому

$$\frac{q}{m} = \frac{3q}{a+b} > \frac{3q}{2q^2/r_0} = 3 \frac{q}{r_0} \left( 2 \frac{q^2}{r_0^2} + \frac{b}{r_0} \right)^{-1}.$$

Из последнего неравенства следует, что отношение  $q/m$  может быть сделано сколь угодно большим посредством подходящего выбора величин  $q/r_0$  и  $b/r_0$ , причем выбор параметра  $b$  позволяет варьировать размер геона  $r_0$ . Для электрона  $q \sim$

$10^{-34}\text{см}$ ,  $m \sim 10^{-55}\text{см}$  (в геометрических единицах) и неравенство  $q/m \geq 10^{21}$  достигается, например, при  $b = 0$  и  $r_0 \sim 10^{-14}\text{см}$ . Геоны с такими параметрами заведомо существуют, поскольку выполняется достаточное условие  $q \leq r_0/\sqrt{2}$ .

Для геона с элементарным зарядом и значением массы порядка планковской,  $m \sim 10^{-33}\text{см}$  ( $\sim 10^{-5}\text{г}$ ), имеем  $q/m \sim 1$ . Аналитический пример такой конфигурации дает анзац

$$r(\xi) = \sqrt{\xi^2 + r_0^2}, \quad a = \frac{\pi q^2}{r_0} = 3m, \quad b = 0,$$

с метрической функцией

$$A = 1 + \frac{q^2}{r_0^2} \left\{ 1 + 2 \frac{\xi}{r_0} \arctan\left(\frac{\xi}{r_0}\right) + \left(1 + \frac{\xi^2}{r_0^2}\right) \arctan^2\left(\frac{\xi}{r_0}\right) - \frac{\pi^2}{4} \left(1 + \frac{\xi^2}{r_0^2}\right) \right\}$$

и отношением  $q/m = 3r_0/(\pi q) \sim 1$ , где размер геона  $r_0 \sim m \sim q$ .

## Заключение

В данной работе дана полная характеристика возможных классов решений для самогравитирующего фантомного скалярного поля без заряда с плоской асимптотикой пространства-времени в окрестности удаленного наблюдателя. А именно, по заданной радиальной функции  $r(\xi)$ , возможный вид которой однозначно определен выше, мы можем для любого значения свободного параметра  $a$  установить тип соответствующей конфигурации с помощью простых алгоритмических вычислений. Для конфигураций с зарядом установлены условия существования симметричной кротовой норы и, следовательно, соответствующего топологического геона. Показано, что существуют заряженные фантомные конфигурации, в частности, топологические геоны с произвольно большим отношением заряда к массе. Полученные результаты могут быть непосредственно использованы, во-первых, для математического моделирования астрофизических экзотических объектов на субгалактических масштабах, а во-вторых, для построения математических моделей экзотических частиц с планковскими параметрами, которые необходимы в теории ранней Вселенной для объяснения различных процессов на стадии инфляции.

## Список литературы

- [1] Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр. М.: Наука, 1989.
- [2] Visser M. Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking. New York: AIP Press, 1995.
- [3] Черепашук А.М. Поиски черных дыр // Успехи физических наук, 2003, 173, с. 345 – 384.
- [4] Kardashev N.S., Novikov I.D., Shatskiy A.A. Astrophysics of Wormholes // Int. J. Mod. Phys. D., 2007, 16, p. 909 – 926 (arXiv: astro-ph/0610441v2).

- [5] Новиков И.Д., Кардашев Н.С., Шацкий А.А. Многокомпонентная Вселенная и астрофизика кротовых нор//Успехи физических наук, 2007, 177, с. 1017 – 1023.
- [6] Проект «РадиоАстрон», <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>.
- [7] Проект «Миллиметрон», <http://www.asc.rssi.ru/millimetron>.
- [8] Sakellariadou M. Production of Topological Defects at the End of Inflation//Lect. Notes Phys., 2008, 738, p.359 – 392.
- [9] Sorkin R.D. On the relation between charge and topology//Journal of Physics A: Mathematical and General, 1977, 10(5), p. 717 – 725.
- [10] Sorkin R.D. Introduction to topological geons//In «Topological Properties and Global Structure of Space-Time». Proc. NATO Adv. Study Inst. on topological properties and global structure of space-time, Erice, Italy, May 12-22, 1985. Edited by P.G. Bergmann and V. de Sabbata, Plenum Press, New York, 1986, p. 249 – 270.
- [11] Dennhardt H., Lechtenfeld O. Scalar Deformations of Schwarzschild Holes and their stability//Int. J. Mod. Phys., 1998, A13, p. 741 – 764.
- [12] Bronnikov K.A., Shikin G.N. Spherically symmetric scalar vacuum: no-go theorems, black holes and solitons//Gravitation&Cosmology, 2002, 8, 2002, 107 – 116.
- [13] Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes//Phys. Rev. Lett., 2006, 96, 251101, 4pp.
- [14] Bronnikov K. A., Chernakova M.S. Charge black holes and unusual wormholes in scalar-tensor gravity//Gravitation&Cosmology, 2007, 13, p. 51 – 55 (arXiv: gr-qc/0703107).
- [15] Никонов В.В., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Асимптотически-плоские решения уравнений Эйнштейна для гравитирующего сферически-симметричного скалярного поля//Вестник ТвГУ, серия «Прикладная математика», 2007, N5(33), с. 11 – 20.
- [16] Nikonov V.V., Tchamarina Ju.V., Tsirolev A.N. A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations//Class. Quantum Grav., 2008, 25, 138001, 5pp.
- [17] Tchamarina Ju.V., Tsirolev A.N. Spherically symmetric gravitating scalar field. The inverse problem and exact solutions//Gravitation and cosmology, 2009, 15, p. 94 – 95.
- [18] Azrez-Aïnou M. Selection criteria for two-parameter solutions to scalar-tensor gravity//General Relativity and Gravitation, 2010, 42, p. 1427 – 1456 (arXiv: gr-qc/0912.1722).
- [19] Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Сферически-симметричные топологические геоны//Вестник ТвГУ, серия «Прикладная математика», 2007, N17(45), с. 59 – 68.